

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО ВГУ)

УТВЕРЖДАЮ  
Заведующий кафедрой  
алгебры и математических  
методов гидродинамики

 (Звягин В.Г.)  
*подпись, расшифровка подписи*  
17.04.2024 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
Б1.В.07 Топологические методы нелинейного анализа

- 1. Код и наименование направления подготовки:**  
01.03.01 Математика
- 2. Профиль подготовки:** Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
- 3. Квалификация выпускника:** Бакалавр
- 4. Форма обучения:** Очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра алгебры и математических методов гидродинамики
- 6. Составители программы:** профессор, д.ф.-м.н. Звягин Виктор Григорьевич
- 7. Рекомендована:** НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 28.03.2024 г.
- 8. Учебный год: 2027-2028** **Семестр(ы): 5**

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

*Целью курса является* формирование у студента целостного понимания о математической дисциплине, устойчивые математические навыки, необходимые для изучения других специальных дисциплин; сформировать способность применения математических формализмов в профессиональной деятельности.

*Задачи учебной дисциплины:*

- ознакомление с современными методами нелинейного анализа и топологических методов анализа;
- выработка навыков и умений по применению полученных знаний при решении задач разных математических дисциплин

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: относится к части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: математический анализ, функциональный анализ, дифференциальная геометрия и топология.

Студент должен свободно владеть математическим анализом, элементами дифференциальной геометрии и топологии, обладать полными знаниями функционального анализа.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-3	Способность к решению задач аналитического характера, предполагающих выбор и многообразие актуальных способов решения задач в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	ПК-3.1	Анализирует многообразие современных способов решения задач в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: современные способы решения задач в предметной области Уметь: работать с разными источниками научной литературы. Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения в предметной области
		ПК-3.2	Выбирает оптимальный способ исследования задач аналитического характера в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: способы исследования аналитических задач в предметной области Уметь: грамотно и правильно выбирать оптимальный способ исследования задач Владеть: источниками информации, теоретическими подходами к исследованию математических моделей в области уравнений с частными производными; навыками работы в информационных современных системах
		ПК-3.3	Применяет выбранный метод исследования к решению задачи в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики	Знать: концептуальные основы методов решения задач в предметной области; классификацию уравнений в частных производных; основные методы доказательства математических утверждений Уметь: применять различные методы решения аналитических задач, грамотно и правильно представлять свои результаты Владеть: методами самостоятельного обучения новым знаниям и способами их применения к исследованию решений задачи в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (в соответствии с учебным планом) — 3/108.**

**Форма промежуточной аттестации: экзамен.**

### 13. Трудоёмкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоёмкость	
	Всего	По семестрам
Аудиторные занятия	50	50
в том числе:		
лекции	34	34
практические	16	16
лабораторные	-	-
Самостоятельная работа	22	22
Форма промежуточной аттестации экзамен	36	36
Итого:	108	108

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Предварительные результаты	Критические точки и критические значения Теорема Сарда	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12184">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12184</a>
1.2	Аксиоматическая теория топологической степени.	Определение топологической степени отображений конечномерных пространств через систему аксиом. О продолжении функции и лемма о нечетных функциях Независимость аксиом Простейшие свойства степени Конструкция степени для гладких отображений и регулярных точек Непрерывная зависимость степени от $f$ и $p$ Конструкция степени для гладких отображений и произвольных точек	
1.3	Существование топологической степени	Конструкция степени для произвольных непрерывных отображений. Теорема существования топологической степени Единственность топологической степени Теорема Брауэра о неподвижной точке (различные варианты)	
1.4	Индекс $p$ - точки и единственность топологической степени	Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Существование периодических решений. Независимость степени от выбора точки $p$ в компоненте связности дополнения образа границы области. Признаки равенства степеней. Вычисление индекса $p$ - точки	
1.5	Дальнейшие свойства топологической степени	Неориентированная степень гладких отображений многообразий. Теоремы Хопфа Теорема Перрона-Фробениуса	
1.6	Неориентированная степень гладких отображений многообразий	Неориентированная степень гладких отображений многообразий. Теорема о произведении индексов Степень суперпозиции отображений Свойства неориентированной степени гладких отображений многообразий	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Предварительные результаты	Критические точки и критические значения Теорема Сарда	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12184">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12184</a>
2.2	Аксиоматическая	Определение топологической степени	

	теория топологической степени.	отображений конечномерных пространств через систему аксиом. О продолжении функции и лемма о нечетных функциях Независимость аксиом Простейшие свойства степени Конструкция степени для гладких отображений и регулярных точек Непрерывная зависимость степени от $f$ и $p$ Конструкция степени для гладких отображений и произвольных точек
2.3	Существование топологической степени	Конструкция степени для произвольных непрерывных отображений. Теорема существования топологической степени Единственность топологической степени Теорема Брауэра о неподвижной точке (различные варианты)
2.4	Индекс $p$ - точки и единственность топологической степени	Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Существование периодических решений. Независимость степени от выбора точки $p$ в компоненте связности дополнения образа границы области. Признаки равенства степеней. Вычисление индекса $p$ - точки
2.5	Дальнейшие свойства топологической степени	Неориентированная степень гладких отображений многообразий. Теоремы Хопфа Теорема Перрона-Фробениуса
2.6	Неориентированная степень гладких отображений многообразий	Неориентированная степень гладких отображений многообразий. Теорема о произведении индексов. Степень суперпозиции отображений Свойства неориентированной степени гладких отображений многообразий

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Предварительные результаты	4	2	-	3	9
2	Аксиоматическая теория топологической степени.	6	2	-	3	11
3	Существование топологической степени	6	3	-	4	13
4	Индекс $p$ - точки и единственность топологической степени	6	3	-	4	13
5	Дальнейшие свойства топологической степени	6	3	-	4	13
6	Неориентированная степень гладких отображений многообразий	6	3	-	4	13
	Экзамен	-	-	-	-	36
	Итого:	34	16	-	22	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе преподавания дисциплины используются такие виды учебной работы, как лекции, практические занятия, а также различные виды самостоятельной работы обучающихся, на которую отводится 22 часа. Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Топологические методы нелинейного анализа» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам практических занятий, самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (контрольной работе и выполнению практических заданий). На лекциях

рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Топологические методы нелинейного анализа» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Вопросы аудиторных занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к экзамену.

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (экзамена). Для понимания и качественного усвоения предмета рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Все необходимые для усвоения курса материалы размещены также на сайте факультета [https://math.vsu.ru/wp/?page\\_id=937](https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937).

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Звягин В.Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа/ В.Г. Звягин ; Воронежский государственный университет. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 291 с.
2	Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа,/ Издательство «Лань», 2009, 272 с
3	Смагин В.В. Действительный анализ : [учебное пособие] / Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015.- 61 с. <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-29.pdf</a> .
4	Колмогоров А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Московский гос. ун-т им. М.В.Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2012 .— 570 с

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
5	Звягин В. Г.. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства : учебное пособие для студентов вузов / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, Н.М. Ратинер ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2007 .— 81 с
6	Ниренберг Л.. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг ; пер. с англ. Н.Д. Введенской .— М. : Мир, 1977 .— 232 с.
7	Звягин В. Г.. Степень ориентированных отображений конечномерных многообразий : учебно-методическое пособие для вузов / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, Н.М. Ратинер ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— 43 с.
8	Введение в топологию : Учебное пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Математика" / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко .— 2-е изд., доп. — М. : Наука : Физматлит, 1995 .— 414 с.
9	Теория степени конечномерных отображений: учеб. пособие для студентов 3 курса мат. фак. / сост. Д. А. Воротников, В. Г. Звягин.-Воронеж: ВГУ, 2002.-58 с.
10	Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П.П.Забрейко.-М.: Наука, 1975.-510 с.

в) информационно-библиотечные ресурсы:

№ п/п	Источник
11	<a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> - Электронный каталог ЗНБ ВГУ
12	<a href="https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937">https://math.vsu.ru/wp/?page_id=937</a> – Сайт факультета
13	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12184">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12184</a> – Электронный курс

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа, / Издательство «Лань», 2009, 272 с
2	Хелемский А. Я.. Лекции по функциональному анализу : [учебник] / А. Я. Хелемский .— М. : МЦНМО, 2004 .— 552 с.
3	Колмогоров А. Н.. Элементы теории функций и функционального анализа : [учебник] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин ; Московский гос. ун-т им. М.В.Ломоносова .— Изд. 7-е .— М. : Физматлит, 2004 .— 570 с
4	Введение в топологию : Учебное пособие для студ. вузов, обуч. по спец. "Математика" / Ю.Г. Борисович, Н.М. Близняков, Я.А. Израилевич, Т.Н. Фоменко .— 2-е изд., доп. — М. : Наука : Физматлит, 1995 .— 414 с.
5	Теория степени конечномерных отображений: учеб. пособие для студентов 3 курса мат. фак. / сост. Д. А. Воротников, В. Г. Звягин.-Воронеж: ВГУ, 2002.-58 с.
6	Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П.П.Забрейко.-М.: Наука, 1975.-510 с.
7	Звягин В. Г.. Линейные фредгольмовы операторы и их свойства : учебное пособие для студентов вузов / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, Н.М. Ратинер ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2007 .— 81 с
8	Ниренберг Л.. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг ; пер. с англ. Н.Д. Введенской .— М. : Мир, 1977 .— 232 с.
9	Звягин В. Г.. Степень ориентированных отображений конечномерных многообразий : учебно-методическое пособие для вузов / В.Г. Звягин, В.Т. Дмитриенко, Н.М. Ратинер ; Воронеж. гос. ун-т .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2006 .— 43 с.
10	Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко.- М.:Изд-во МГУ, 1980.-439 с.
11	Положение об организации самостоятельной работы обучающихся в Воронежском государственном университете

## 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=12184>)

Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linux, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc*, *Math*, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Специализированная мебель.

Для самостоятельной работы используется класс с компьютерной техникой, оснащенный необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

При реализации дисциплины с использованием дистанционного образования возможны дополнения материально-технического обеспечения дисциплины.

## 19. Фонд оценочных средств:

### Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства

1	Предварительные результаты	ПК-3	ПК-3.1	Домашние задания, контрольная работа № 1
2	Аксиоматическая теория топологической степени.	ПК-3	ПК-3.1	Домашние задания, контрольная работа № 1
3	Существование топологической степени	ПК-3	ПК-3.1	Домашние задания, контрольная работа № 1
4	Индекс $p$ - точки и единственность топологической степени	ПК-3	ПК-3.2, ПК-3.3	Домашние задания, контрольная работа № 1
5	Дальнейшие свойства топологической степени	ПК-3	ПК-3.1, ПК-3.2, ПК-3.3	Домашние задания, контрольная работа № 1
6	Неориентированная степень гладких отображений многообразий	ПК-3	ПК-3.1, ПК-3.2, ПК-3.3	Домашние задания, контрольная работа № 1
Промежуточная аттестация Форма контроля - экзамен			Перечень вопросов к экзамену	

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

#### Домашние задания:

##### По теме 1. Предварительные результаты

Звягин В.Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа/ В.Г. Звягин ; Воронежский государственный университет. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 291 с.

Задание:

Доказать, что множество критических значений тождественно постоянной функции есть множество меры нуль.

##### По теме 2. Аксиоматическая теория топологической степени

Звягин В.Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа/ В.Г. Звягин ; Воронежский государственный университет. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 291 с.

Задание:

Показать, как из теоремы 1.2.1 вытекает утверждение леммы 1.2.4

##### По теме 3 Существование топологической степени

Звягин В.Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа/ В.Г. Звягин ; Воронежский государственный университет. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 291 с.

Задание:

1. Задача 1.4.2

2. Доказать теорему 1.4.9

##### По теме 4. Индекс $p$ - точки и единственность топологической степени

Звягин В.Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа/ В.Г. Звягин ; Воронежский государственный университет. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 291 с.

Задания: Показать, как из теоремы Руше вытекает доказательство теоремы 1.5.4

##### По теме 5. Дальнейшие свойства топологической степени

Звягин В.Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа/ В.Г. Звягин ; Воронежский государственный университет. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 291 с.

Задание: Доказать необходимые условия теоремы 1.6.5

##### По теме 6. Неориентированная степень гладких отображений многообразий

Звягин В.Г. Введение в топологические методы нелинейного анализа/ В.Г. Звягин ; Воронежский государственный университет. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. — 291 с.

Задание: Показать, как из теоремы 1.6.9 и формулы (1.6.11) вытекает доказательство теоремы 1.6.12.

**Примерный перечень задач для контрольной работы №1:**

**Контрольно-измерительный материал № 1.**

1. Критические точки и критические значения
2. Теорема Сарда

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

Цель текущего контроля:

Определение уровня сформированности профессиональных компетенций, знаний и навыков деятельности в области знаний, излагаемых в курсе.

Задачи текущего контроля: провести оценивание

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

Текущий контроль предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной работы.

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с перечнем теоретических вопросов и предлагается ответить на данные вопросы. В ходе выполнения заданий нельзя пользоваться литературой и конспектом лекций, ограничение по времени 90 минут.

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 120 минут.

**Критерии оценки компетенций (результатов обучения) при текущей аттестации (контрольной работе):**

– оценка «отлично» выставляется, если не менее чем на четыре пятых всех заданий контрольной работы даны правильные, полные и глубокие ответы, раскрывающие уверенное знание студентом понятий, закономерностей, принципов, фактов, содержащихся в конкретных материалах по теме; высокую сформированность у него аналитико-синтетических операций и их успешное применение при изложении изучаемого материала;

– оценка «хорошо» выставляется, если не менее чем на две трети всех заданий контрольной работы даны правильные, полные и глубокие ответы, раскрывающие достаточное знание студентом понятий, закономерностей, принципов, фактов, содержащихся в конкретных материалах по теме; хорошую сформированность у него аналитико-синтетических операций и в целом их адекватное применение при изложении изучаемого материала;

– оценка «удовлетворительно» выставляется, если правильно выполнено не менее половины всех заданий контрольной работы, при этом допускается недостаточная полнота и глубина ответов, в которых студентом продемонстрирован необходимый минимум знаний понятий, закономерностей, принципов, фактов, содержащихся в конкретных материалах по теме; слабая сформированность у него аналитико-синтетических операций, затруднения в их применении при изложении изучаемого материала;

– оценка «неудовлетворительно» выставляется, если с минимально необходимым уровнем решения выполнено менее половины всех заданий контрольной работы, ответы демонстрируют незнание или поверхностное знание студентов понятий, закономерностей, принципов, фактов, содержащихся в конкретных материалах по теме; несформированность у него аналитико-синтетических операций.

#### **Количественная шкала оценок:**

– оценка «отлично» выставляется, если безошибочно выполнено не менее 80% заданий контрольной работы, качество решения которых соответствует критерию оценки «отлично»;

– оценка «хорошо» выставляется, если безошибочно выполнено не менее 66% и не более 79% заданий контрольной работы, качество решения которых соответствует критериям оценки «хорошо»;

– оценка «удовлетворительно» выставляется, если безошибочно выполнено не менее 50% и не более 65% заданий контрольной работы, качество решения которых соответствует критериям оценки «удовлетворительно»;

– оценка «неудовлетворительно» выставляется, если безошибочно выполнено менее 50% заданий контрольной работы, качество решения которых соответствует критериям оценки «неудовлетворительно».

## **20.2. Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Топологические методы нелинейного анализа» проводится в форме экзамена. Предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра. Результаты текущей аттестации обучающегося по решению кафедры могут быть учтены при проведении промежуточной аттестации. При несогласии студента, ему дается возможность пройти промежуточную аттестацию (без учета его текущих аттестаций) на общих основаниях.

При проведении экзамена учитываются результаты контрольной работы и учитывается выставляемая преподавателем оценка за работу в ходе практических занятий.

Если у обучающегося есть положительная оценка по контрольной работе и положительная оценка работы в ходе обучения по практике, то оценка по экзамену выставляется как среднее арифметическое данных оценок с округлением до десятых долей по математическим правилам. Если обучающийся не имеет положительной оценки по контрольной работе или практике, или не согласен с этой оценкой, он может ответить на соответствующие вопросы в ходе экзамена.

#### Примерный перечень вопросов:

1	Критические точки и критические значения
2	Теорема Сарда
3	Определение топологической степени отображений конечномерных пространств через систему аксиом. Независимость аксиом. Простейшие свойства степени. Непрерывная зависимость степени от отображений и точек.
4	О продолжении функции. Лемма о нечётных функциях.
5	Конструкция степени для гладких отображений и регулярных точек. Конструкция степени для гладких отображений и произвольных точек.
6	Конструкция степени для произвольных непрерывных отображений.
7	Теоремы существования и единственности топологической степени. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
8	Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Существование периодических решений. Вычисление индекса $p$ - точки
9	Независимость степени от выбора точки $p$ в компоненте связности дополнения образа границы области. Признаки равенства степеней.

10	Неориентированная степень гладких отображений многообразий. Теоремы Хопфа. Теорема Перрона-Фробениуса.
11	Неориентированная степень гладких отображений многообразий. Теорема о произведении индексов. Степень суперпозиции отображений. Свойства неориентированной степени гладких отображений многообразий

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие **показатели:**

- 1) знание теоретических основ;
- 2) умение решать задачи
- 3) умения применять знания в профессиональной сфере;
- 4) успешное прохождение текущей аттестации.

Для оценивания результатов экзамена используется **шкала:** «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Соотношение показателей, критериев и шкалы оценивания результатов обучения показаны в следующей таблице:

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие обучающимся всем перечисленным показателям по каждому из вопросов контрольно-измерительного материала. Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, применять теоретические знания для решения практических задач в области курса, студент умеет работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представляет свои результаты, правильно отвечает на вопросы КИМ	Повышенный уровень	Отлично
Несоответствие ответа обучающегося одному из перечисленных выше показателей (к одному из вопросов контрольно-измерительного материала) и правильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. ИЛИ Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей (либо двум к одному вопросу, либо по одному к каждому вопросу контрольно-измерительного материала) и правильные ответы на два дополнительных вопроса в пределах программы.	Базовый уровень	Хорошо
Несоответствие ответа обучающегося любым двум из перечисленных показателей и неправильный ответ на дополнительный вопрос в пределах программы. ИЛИ Несоответствие ответа обучающегося любым трем из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Несоответствие ответа обучающегося любым из перечисленных показателей (в различных комбинациях по отношению к вопросам контрольно-измерительного материала).	–	Неудовлетворительно

### 20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

№1. Заполните пропуск.

Отображение  $f : U \rightarrow F$  называется дифференцированным по Фреше в точке  $x_0 \in U$ , если существует  $A \in L(E, F)$  такой, что для всех  $x \in U$  имеет место представление  $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \omega(x_0, x - x_0)$ , где  $\|\omega(x_0, x - x_0)\| = \dots$ , при  $x \rightarrow x_0$ .

а)  $o(\|x - x_0\|)$ ;

б)  $|x - x_0|$ ;

в)  $ox$ ;

г)  $ox_0$ .

№2 Для скольких  $A \in L(E, F)$  выполнено соотношение  $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + \omega(x_0, h)$ , где  $\|\omega(x_0, h)\| = o\|h\|$  при  $\|h\| \rightarrow 0$ ?

а) не более одного;

б) по крайней мере одного;

в) для нескольких  $A$ , обладающих определёнными свойствами.

№3 Заполните пропуск.

Если функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и ... в интервале  $(a, b)$ , то найдётся точка  $\theta \in (a, b)$ , такая, что  $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$ .

**дифференцируема**

№4 Заполните пропуск.

Пусть  $f : U \rightarrow F$  имеет производную Фреше в каждой точке открытого подмножества  $U$  пространства  $E$ . Тогда определено отображение  $f' : U \rightarrow L(E, F)$ ,  $x \rightarrow f'(x)$ . Говорят, что отображение  $f : U \rightarrow F$  принадлежит классу  $C^1$ , если отображение  $f' : U \rightarrow L(E, F)$ ,  $x \rightarrow f'(x)$  ...

**непрерывно**

№5 Если производная Гато  $f'_G(x)$  отображения  $f$  существует в некоторой окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0$  и отображение  $f'_G : U(x_0) \rightarrow L(E, F)$ , непрерывно, то  $f$  дифференцируемо по Фреше в точке  $x_0$ , и производная Фреше  $f'(x_0)$  и производная Гато  $f'_G(x_0)$

а) совпадают;

б) не совпадают.

№6 Пусть  $f : E \rightarrow F$  – постоянное отображение, т.е.  $f(x) = y_0$  для всех  $x \in E$ . Найдите  $f'(x)$ ?

**0.**

№7 Пусть  $U$  – открытое подмножество нормированного пространства  $E$  и  $f : U \rightarrow F$  – отображение  $U$  в нормированное пространство  $F$ . Пусть  $x_0 \in U$ . Если для любого  $h \in E$  существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \equiv \delta f(x_0, h),$$

то этот предел отображения  $f$  в точке  $x_0$  называется

а) **дифференциалом Гато**;

б) производной Гато.

№8 Пусть  $A : E \rightarrow F$  – линейный, непрерывный оператор. Тогда его производная в любой точке  $x \in E$  есть?

**сам этот оператор.**

---

№9 Чему равна  $d(I, \overline{D}, p)$ , где  $I$  – тождественное отображение?

1.

№10 Пусть  $p$  и  $q$  две различные точки в одной и той же компоненте связности множества  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ . Тогда  $d(f, \overline{D}, p)$  и  $d(f, \overline{D}, q)$

а) равны;

б) не равны.

№11 Пусть  $(f, \overline{D}, p), (g, \overline{D}, p) \in \Sigma$  и для всех  $x \in \partial D$   $\|g(x) - f(x)\| \leq \|f(x)\|$ . Тогда  $d(f, \overline{D}, p)$  и  $d(g, \overline{D}, p)$

а) равны;

б) не равны.

№12 Пусть  $p \in \mathbb{R}^n, f \in C(\emptyset)$ , то есть  $f$  – отображение, которое "ничего ничему не сопоставляет". Тогда  $(f, \emptyset, p) \in \Sigma$  и  $d(f, \emptyset, p)$  равна

0.

№13 Для отображения  $f \in C^1(\overline{D})$  точка  $x \in \overline{D}$  называется критической, если якобиан  $Jf(x) = \det f'(x)$  равен

0.

№14 Образ  $f(C(f))$  называется множеством критических значений и обозначается символом  $S(f)$ . Его элементы называют

а) критическими значениями отображения  $f$ ;

б) регулярными значениями отображения  $f$ ;

в) точками перегиба отображения  $f$ .

№15 Для  $f \in C^1(\overline{D})$  лебегова мера  $\mu$  множество критических значений  $S(f)$  равна

0.

№16 Пусть  $B$  – шар пространства  $\mathbb{R}^n$  с центром в нуле и  $f: B \rightarrow \mathbb{R}^n$  – непрерывное отображение, такое что  $f(x) \neq 0, x \in \partial B$ . Предположим, что выполнено следующее условие  $f(-x) = -f(x), x \in B$ . Тогда степень  $d(f, B, 0)$  является

а) нечётным числом;

б) четным числом.

№17 Пусть  $K$  – подмножество  $\overline{D}$  такое, что  $D \setminus K \in B$ . Предположим, что  $(f, \overline{D}, p) \in \Sigma$  и  $p \notin f(K)$ , тогда  $(f, \overline{D \setminus K}, p) \in \Sigma$ ,  $d(f, \overline{D}, p)$  и  $(f, \overline{D \setminus K}, p)$

а) равны;

б) не равны.

№18 Пусть  $K$  – подмножество  $\overline{D}$  такое, что  $D \setminus K \in B$ . Предположим, что  $(f, \overline{D}, p) \in \Sigma$  и  $p \notin f(K)$ , тогда  $(f, \overline{D \setminus K}, p) \in \Sigma$ ,  $d(f, \overline{D}, p)$  и  $(f, \overline{D \setminus K}, p)$ ...

равны.

№19 Для любой области  $D \in B$  такой, что  $0 \in D$ , степень  $d(I|_{\overline{D}}, \overline{D}, 0) = 1$ , где  $I|_{\overline{D}}$  – сужение тождественного отображения на  $\overline{D}$ . Данная аксиома носит название аксиомы

нормировки.

---

### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

3) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**

Программа рекомендована НМС математического факультета протокол № 0500-03 от 28.03.2024 г.